...... مقرر ميكانيك الأمواج

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح مقرر علم المرونة لطلاب سنة رابعة رياضيات (ميكانيك)

الدورة الإضافية ٢٠١٦ - ٢٠١٧

الدرجة: 100

السؤال الأول :

(50)

١	خطأ 2	التصويب: يساوي $A_\ell B_m C_n$.	3
٢	خطأ 2	التصويب: $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$.	3
٣	خطأ 2	التصويب: فإن المقدار الناتج دوماً مقدار سالب	3
٤	خطأ 2	التصويب: كل منها لا تتغير تتغير هذه الجملة .	3
٥	خطأ 2	التصويب: يكافئ فقط ثلاث تغيرات سينية باتجاه الاتجاهات الرئيسية للانفعالات اللاغرغنية.	3
٦	صح 5		
٧	خطأ 2	التصويب: تقلص سيني باتجاه Ox_1 ومحافظة سينية باتجاه كل من Ox_2 , Ox_3	3
٨	خطأ 2	التصويب: يكون لدينا تشوه حاد في الزاوية في الصفيحة P_1 في اللحظة $t_1>0$ ما بين الاتجاهين (1) و (3) .	3
٩	خطأ 2	التصويب: $e_{23}(P_1;t_1) = \frac{1}{19}$.	3
١٠	خطأ 2	التصويب: $I_1(P_1;t_1) = -\frac{1}{17}$	3

(28) السؤال الثاني

أولاً: العلاقة التي تعطي مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية، المتعلقة بالحالة $Ox_1x_2x_3$ بدلالة المشتقات الجزئية للإزاحة بالنسبة لـ x_j هي:

$$* \quad e_{jk}(p;t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p;t) - \delta_{jk}\right], \quad j=1,2,3,\; k=1,2,3$$

نعلم أن المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}: \vec{PP'}$ هي:

$u_i(p;t) = \xi_i(p;t) - x_i$، بالتالي $\xi_i(p;t) = x_i + u_i(p;t)$ (وهنا $i=1,2,3$)

وباشتقاق العلاقة الأخيرة جزئياً بالنسبة لكل من x_j و x_k، نجد:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p;t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) \Rightarrow \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)$$

وبالتالي: $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p;t) = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)$. بالتعويض في *، نجد:

$$e_{jk}(p;t) = \frac{1}{2}\left\{\left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\right]\left[\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\right] - \delta_{jk}\right\}$$

وباستخدام خواص اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة (رموز اينشتاين)، نجد:

$$e_{jk}(p;t) = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\,\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\,\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta_{jk} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p;t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(p;t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t) - \delta_{jk}\right]$$

ومنه العلاقة المطلوبة هي:

$$e_{jk}(p;t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(p;t) + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p;t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\right], \quad j=1,2,3,\; k=1,2,3$$

10

ثانياً:
لدينا:

$$\lambda_{11} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p_1;t_1)} = -1 + \sqrt{1+0} = 0$$

$$\lambda_{22} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p_1;t_1)} = -1 + \sqrt{1+0} = 0$$

$$\lambda_{33} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{33}(p_1;t_1)} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{24}} = -1 + \sqrt{\frac{13}{12}}$$

$$\cos\varphi(1,2)=\frac{2e_{12}(P_1;t_1)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22})}=\frac{\frac{2}{9}}{1\times 1}=\frac{2}{9}$$

$$\cos\varphi(1,3)=\frac{2e_{13}(P_1;t_1)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{33})}=-\frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{1\times\sqrt{\frac{13}{12}}}=-\frac{2\sqrt{12}}{13}$$

$$\cos\varphi(2,3)=\frac{2e_{23}(P_1;t_1)}{(1+\lambda_{22})(1+\lambda_{33})}=\frac{\frac{2}{\sqrt{12}}}{1\times\sqrt{\frac{13}{12}}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- بالتالي التشوه الأعظمي للوسط المادي المستمر في الحالة الانزياحية P_1 واللحظة المحددة $t_1>0$ هو:

$$W(P_1,t_1)=\left\{0,0,-1+\sqrt{\frac{13}{12}},\ \frac{2}{9},\ -\frac{2\sqrt{12}}{13},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$$

18

السؤال الثالث: 22

(1) المركبات الديكارتية الانزياحية لشعاع الإزاحة $\vec{u}$ هي:

$u_i(p;t)=\xi_i(p;t)-x_i$ (حيث: $i=1,2,3$)، بالتالي:

$$u_1(p;t)=\xi_1(p;t)-x_1=x_1\,ch(3t+4t^2)+x_2\,sh(3t+4t^2)-x_1$$
$$=x_1[ch(3t+4t^2)-1]+x_2\,sh(3t+4t^2)$$

$$u_2(p;t)=\xi_2(p;t)-x_2=x_1\,sh(3t+4t^2)+x_2\,ch(3t+4t^2)-x_2$$
$$=x_1\,sh(3t+4t^2)+x_2[ch(3t+4t^2)-1]$$

$$u_3(p;t)=\xi_3(p;t)-x_3=x_3e^{-(3t+4t^2)}-x_3=x_3[e^{-(3t+4t^2)}-1].$$

8

(2) - الشكل العام لمصفوفة التشوهات الانزياحية المتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ هو:

$$e_{jk}(p;t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}(p;t)-\delta_{jk}\right];\ \begin{cases}j=1,2,3\\k=1,2,3\end{cases}$$

بالتالي:

$$e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\xi_i}{\partial x_2}-0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}[2ch(3t+4t^2)\,sh(3t+4t^2)+0]=ch(3t+4t^2)\,sh(3t+4t^2),$$

$$e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\xi_i}{\partial x_3}-0\right)=\frac{1}{2}(0+0+0-0)=0$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\xi_i}{\partial x_3}-0\right)=\frac{1}{2}(0+0+0-0)=0$$

14

د. منتجب حسن